MATHÉMATIQUES **2021-2022**
Lycée Stanislas

Exercices de vacances

On rappelle que $0! = 1$ et que pour $n \in \mathbb{N}^*$, $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$.

1 Équations et inéquations

Exercice 1 : Résoudre les équations suivantes.

1. $\ln(x^2 - 1) = \ln(2 - x) + \ln(3 - x)$.
2. $e^{2x} - 3e^x + 2 = 0$.
3. $x^3 + 3x^2 - 3x - 1 = 0$.
4. $xy = 2$ et $x + y = 4$.
5. $x - 1 = \sqrt{x + 2}$.
6. $||x - a| - 2| = -\sqrt{x^2 + 3}$ où $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 2 : Résoudre les inéquations suivantes.

1. $e^{x^2+x} \leqslant e$.
2. $4x^4 + 20x^2 - 875 \leqslant 0$.
3. $0 \leqslant (m + 1)x + 2 - m$ où $m \in \mathbb{R}$.
4. $5x \leqslant -\frac{5x+3}{x-1}$.
5. $|x^2 + x + 1| > |x - 4|$.
6. $\sqrt{x^2 - 5x + 4} \geqslant |x - 1|$.
7. $\sqrt{x^2 - 5x + 4} \geqslant x - 1$.
8. $x + \sqrt{x^3 - x^4} \geqslant 0$.

Exercice 3 : Résoudre les inéquations suivantes.

1. $\sqrt{2x + a} \geqslant x + 1$ où $a \in \mathbb{R}$.
2. $\frac{ax}{ax+3} \leqslant 4x$ où $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 4 : Montrer que l'équation $x^3 - 6x - 6 = 0$ a une unique solution réelle qu'on ne cherchera pas à expliciter.

Exercice 5 : Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\left|x + \frac{1}{x}\right| \geqslant 2$.

Exercice 6 : Soient $\alpha < \beta$ des éléments de $]0, \frac{\pi}{2}[$. Montrer que $\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} < \frac{\beta}{\alpha}$.

Exercice 7 : Résoudre l'inégalité $\sqrt{3}\cos x - \sin x \leqslant 1$. On pourra pour cela utiliser un cercle trigonométrique pour une démonstration graphique ou réécrire $\sqrt{3}\cos x - \sin x$ sous une autre forme.

2 Calculs de limites

Exercice 8 : Calculer les limites suivantes si elles existent.

1. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$.
2. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$.
3. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x}$.
4. $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{x + 1} - \sqrt{x}$.
5. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{x^2+9}-3}$.
6. $\lim\limits_{x\to 9} \frac{3-\sqrt{x}}{x^2-81}$.

7. $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln(|x \ln x|)$.
8. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(3x+1)}{2x}$.

Exercice 9 : Calculer les limites suivantes si elles existent.

1. $\lim\limits_{x \to 2} \frac{\sqrt{2x}-2}{\sqrt{x+1}-\sqrt{2x-1}}$.
2. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{6}} \frac{\sin(\frac{\pi}{6}-x)}{1-2\sin(x)}$.

Exercice 10 : Calculer les limites suivantes si elles existent.

1. $\lim\limits_{n \to +\infty} n \sin(\frac{1}{n})$.
2. $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{5^n+2^n}{3^n+4^n}$.
3. $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{e^n+n^2-1}{e^n+n+\sin(n)+1}$.

3 Nombres complexes

Exercice 11 : Mettre sous forme algébrique le complexe $\frac{1}{2+i} - \frac{1}{i-2}$.

Exercice 12 : Mettre sous forme trigonométrique les complexes $(3+i\sqrt{3})^4$ et $\frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i}$.

Exercice 13 : Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes.

1. $z + |z|^2 = 7 + i$.
2. $|1+iz| = |1-iz|$.
3. $\frac{mz}{mz+1} = mz$ (où $m \in \mathbb{C}$).

Exercice 14 : Déterminer les réels λ tels que $(\lambda+i)(\lambda+5-i(\lambda-7))$ soit réel.

Exercice 15 : Pour tout nombre complexe $z = x+iy$, avec x et y réels et $(x,y) \neq (-1,0)$, on pose $U = \frac{z-i}{z+1}$.

1. Écrire U sous forme algébrique.
2. Décrire géométriquement les ensembles suivants.
   (a) L'ensemble des points M du plan tels que U soit imaginaire pur.
   (b) L'ensemble des points M du plan tels que U soit réel.
   (c) L'ensemble des points M du plan tels que U soit réel et strictement négatif.

Exercice 16 :

1. Montrer que pour tous complexes a, b, on a $|a+b|^2 + |a-b|^2 = 2(|a|^2+|b|^2)$.
2. En déduire une relation métrique entre diagonale et côtés dans un parallélogramme.

4 Suites et fonctions

Exercice 17 : On considère les fonctions f et g définies sur $]-1,1[$ par $f(x) = x - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ et $g(x) = f(x) + \frac{x^3}{3(1-x^2)}$.

1. Montrer que f est décroissante et que g est croissante.
2. En déduire que pour tout $x \in]0,1[$, $-\frac{x^2}{3(1-x^2)} \leqslant 1 - \frac{1}{2x}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \leqslant 0$.
3. On pose $u_n = \ln\left(\frac{n!}{n^n\sqrt{n}e^{-n}}\right)$ et $v_n = u_n - \frac{1}{12n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n = 1 - \frac{2n+1}{2}\ln\left(\frac{1+\frac{1}{2n+1}}{1-\frac{1}{2n+1}}\right)$.
   (b) Montrer que (u_n) est décroissante, que (v_n) est croissante et que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n - v_n = 0$.
   (c) On admet alors que (u_n) et (v_n) convergent vers une limite commune ℓ et on pose $C = e^{\ell}$. Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{n}} = C$.

Exercice 18 : On considère la fonction f définie par : $f(x) = \exp\left(\sqrt{x^2-1}\right)$.

1. Déterminer l'ensemble de définition et de dérivabilité de f.
2. Déterminer la parité de f.
3. Expliciter le tableau des variations de f, y compris ses limites aux bornes de son domaine de définition.

Exercice 19 : Déterminer le tableau de variation des fonctions suivantes.

1. $f(x) = 2\cos x + \cos(2x)$ sur $[0, \pi]$.
2. $f(x) = 2\sin x - \sin(2x)$ sur $[0, \pi]$.

Exercice 20 : Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{x}{e^x+1}$.

1. Montrer qu'il existe un unique $\alpha \in \mathbb{R}_+$ tel que $f'(\alpha) = 0$. On ne cherchera pas à expliciter α.
2. Montrer que $f(\alpha) = \alpha - 1$.
3. Donner le tableau de variations de f.

Exercice 21 : Déterminer les variations de la fonction f définie par $f(x) = x - \sqrt{|4x - x^2|}$.

Exercice 22 : On définit (u_n) par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{1}{1+2u_n}$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $u_{n+1} - \frac{1}{2} = \frac{\frac{1}{2}-u_n}{1+2u_n}$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\frac{1}{3} \leqslant u_n \leqslant 1$.
3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left|u_{n+1} - \frac{1}{2}\right| \leqslant \frac{3}{5}\left|u_n - \frac{1}{2}\right|$.
4. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left|u_n - \frac{1}{2}\right| \leqslant (\frac{3}{5})^n$.
5. Montrer que (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

5 Calculs d'intégrales

Exercice 23 : Calculer les intégrales suivantes.

1. $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x+1}\,dx$.
2. $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin^2 x}\,dx$.
3. $\displaystyle\int_1^4 \frac{\ln x}{x}\,dx$.
4. $\displaystyle\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$.

Exercice 24 : Calculer les intégrales suivantes.

1. $\displaystyle\int_0^\pi \cos^2 x\,dx$.
2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x+3}{x+5}\,dx$.
3. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{e^x+1}\,dx$.

Exercice 25 : En utilisant une intégration par parties, calculer les intégrales suivantes.

1. $\displaystyle\int_1^e x\ln x\,dx$.
2. $\displaystyle\int_0^1 x\sin x\,dx$.
3. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x\,dx$. On pourra faire deux intégrations par parties.
4. $\displaystyle\int_1^2 \cos(\ln t)\,dt$.

Exercice 26 : Sans aucun calcul, uniquement avec des considérations d'aire, calculer $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$.

6 Sommes

Définition : Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$. On note $\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + \dots + a_n$. Par exemple, $\sum_{k=1}^{5} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2}$.

Exercice 27 : Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $a, b \in \mathbb{C}$ et q un complexe différent de 1.

1. Montrer que $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.
2. Montrer que $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
3. Montrer que $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.
4. Montrer que $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.
5. Montrer que $a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$.

Exercice 28 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit $f : [0, 1[\to \mathbb{R}$ par $f(x) = \sum_{k=1}^{n} x^k$.

1. Donner une expression de f sans utiliser de somme.
2. En déduire une valeur explicite de $\sum_{k=1}^{n} kx^k$.

Exercice 29 : On définit (u_n) par $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.

1. Montrer que (u_n) est strictement croissante.
2. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $k! \geqslant 2^{k-1}$.
3. En déduire que (u_n) est majorée par 3. Que peut-on en conclure ?

Exercice 30 : On définit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$.

1. Justifier que pour tout $t > 0$, $1 - \frac{1}{t} \leqslant \ln t \leqslant t - 1$.
2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leqslant \ln 2 \leqslant u_n + \frac{1}{2n}$. On pourra appliquer la relation précédente à $t = \frac{x}{x-1}$.
3. Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice 31 : Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}$. Le but de l'exercice est de prouver l'inégalité $\left(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right)$.

1. On suppose $\sum_{k=1}^{n} y_k^2 = 0$. Montrer l'inégalité demandée.
2. On suppose désormais $\sum_{k=1}^{n} y_k^2 \neq 0$. On définit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $f(t) = \sum_{k=1}^{n} (x_k + ty_k)^2$.
   (a) Justifier que f est un trinôme en t.
   (b) À l'aide du signe de f, montrer l'inégalité demandée.
3. Montrer que l'inégalité est une égalité si et seulement si $y_1 = \dots = y_n = 0$ ou s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $x_k = \lambda y_k$.

Exercice 32 : Soient q, r des entiers naturels avec $1 \leqslant q \leqslant r-1$. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=q}^{r} \frac{1}{k}$ peut s'écrire comme le quotient d'un entier impair par un entier pair. On pourra faire une récurrence forte sur r en distinguant le cas r pair de r impair.

Exercice 33 : On pose $V_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos^{2n}(t)\,dt$ et $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}(t)\,dt$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],\ t \leqslant \frac{\pi}{2} \sin t$.
2. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant V_n \leqslant \frac{\pi^2}{4}(W_n - W_{n+1})$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2} W_n$ et en déduire que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{V_n}{W_n} = 0$.
4. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$, $W_n = n\left((2n-1)V_{n-1} - 2nV_n\right)$.
5. Déduire des questions précédentes que pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{V_{n-1}}{W_{n-1}} - \frac{V_n}{W_n} = \frac{1}{2n^2}$.
6. Conclure que la suite de terme général $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ converge et calculer sa limite.

Exercice 34 : Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé et $n \in \mathbb{N}$. On pose $I_n = \displaystyle\int_0^x \frac{t^n}{n!} e^{1-t} dt$.

1. A l'aide d'une intégration par parties, donner une relation de récurrence liant I_n et I_{n-1} pour $n \geqslant 1$.
2. En déduire une expression de I_n en fonction de I_0 puis que $I_n = e - e^{1-x} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$.
3. On pose $f_n(t) = \frac{t^n}{n!} e^{1-t}$ défini pour t compris entre 0 et x (on ne précise pas ici l'ordre de ces bornes car on ne connaît pas le signe de x).
   (a) On suppose ici que $x \geqslant 0$, montrer que $\forall t \in [0, x],\ 0 \leqslant |f_n(t)| \leqslant \frac{x^n}{n!} e$ et en déduire que $0 \leqslant |I_n| \leqslant \frac{x^n}{n!} ex$.
   (b) On suppose ici que $x < 0$, montrer que $\forall t \in [x, 0],\ 0 \leqslant |f_n(t)| \leqslant \frac{|x|^n}{n!} e^{1-x}$ et en déduire que $0 \leqslant |I_n| \leqslant \frac{|x|^n}{n!} |x| e^{1-x}$.
4. Soit $a > 0$. Montrer que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$.
5. En déduire que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} I_n = 0$.
6. En déduire que $e^x = \displaystyle\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$.

Exercice 35 : Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. On note $I_n(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-t} t^n\,dt$.

1. Calculer $I_{n+1}(x)$ en fonction de $I_n(x)$.
2. En déduire que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} I_n(x) = n!$.