Fonctions usuelles

Ce polycopié regroupe l'ensemble des fonctions usuelles à connaître pour l'année à venir. Il est conseillé de bien connaître leur courbe représentative qui permet de retenir de nombreuses propriétés.

1 Théorèmes d'analyse usuels

1.1 Graphe de la réciproque

Théorème 1. *Soient $\mathcal{D}, \mathcal{D}'$ des parties de $\mathbb{R}$ et $f : \mathcal{D} \to \mathcal{D}'$ une bijection. Les graphes de f et de f^{-1} sont symétriques l'un de l'autre par rapport à la première bissectrice (qui est la droite d'équation $y = x$).*

1.2 Dérivation de fonctions composées

Théorème 2. *Soient I, J des intervalles de $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$, $f : I \to J$ dérivable en x_0 et $g : J \to \mathbb{R}$ dérivable en $f(x_0)$. $g \circ f$ est dérivable en x_0 et $(g \circ f)'(x_0) = f'(x_0)g'(f(x_0))$.*

1.3 Intégration par parties

Théorème 3. *Soient $a \leqslant b \in \mathbb{R}$ et $u, v : [a, b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ (autrement dit dérivables et de dérivées continues). On a $\displaystyle\int_a^b u'(t)v(t)\,dt = \Big[u(t)v(t)\Big]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)\,dt$.*

2 Fonctions logarithmes, exponentielles, puissances

2.1 Racines $n^{\text{ème}}$

Proposition 1.

a) Soient $n \in \mathbb{N}$ impair et $x \in \mathbb{R}$. Il existe un unique $y \in \mathbb{R}$ tel que $y^n = x$.

b) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ pair et $x \in \mathbb{R}_+$. Il existe un unique $y \in \mathbb{R}_+$ tel que $y^n = x$.

Définition 1. *On dit que y est la racine $n^{\text{ème}}$ de x et on note $y = \sqrt[n]{x}$.*

Notation. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}_+$. On note $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$.

Définition 2. *Soient $p \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}_+$. On définit $x^{\frac{p}{q}} = (x^{\frac{1}{q}})^p$.*

Remarque 1. Si $x \neq 0$, on a la même définition pour $p \in \mathbb{Z}$.

2.2 Logarithme népérien

Définition 3. $\ln$ *est la primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$ qui s'annule en 1.*

Propriétés 1.

a) $\ln$ *est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln'(x) = \frac{1}{x}$.*

b) $\ln$ *est strictement croissante.*

c) $\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln(xy) = \ln x + \ln y$.

d) $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln(\frac{1}{x}) = -\ln x$.

e) $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall r \in \mathbb{Q},\ \ln(x^r) = r \ln x$.

f) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$.

g) $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$.

h) $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln x \leqslant x - 1$ *(inégalité de convexité du logarithme).*

Définition 4. *Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ différent de 1. On appelle logarithme de base a la fonction notée $\log_a$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$.*

Notation. La fonction $\log_{10}$, appelée logarithme décimal, est notée plus simplement $\log$.

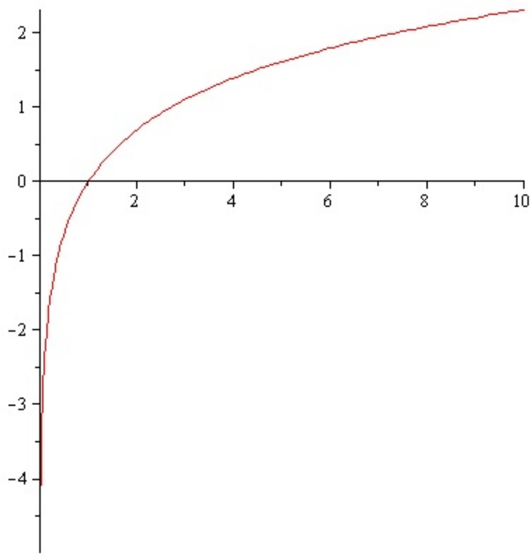

FIGURE 1 – La fonction logarithme

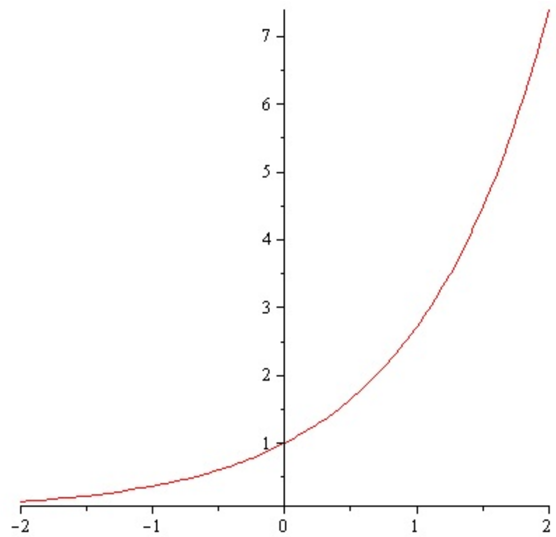

FIGURE 2 – La fonction exponentielle

2.3 Exponentielle

Proposition 2. $\ln$ *est une bijection de* $\mathbb{R}_+^*$ *dans* $\mathbb{R}$.

Définition 5. *L'exponentielle est la fonction réciproque de* $\ln$. *Elle est définie sur* $\mathbb{R}$. *On note* $e = \exp 1$ *et* $\exp x = e^x$.

Remarque 2. Par définition, on a $e^x = y \iff \ln y = x$.

Propriétés 2.

a) $\exp$ *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et* $\exp' = \exp$.

b) $e^0 = 1$.

c) $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x > 0$.

d) $\forall x \in \mathbb{R},\ \ln(e^x) = x$.

e) $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ e^{\ln x} = x$.

f) $\exp$ *est strictement croissante.*

g) $\forall x, y \in \mathbb{R},\ e^{x+y} = e^x e^y$.

h) $\forall x \in \mathbb{R},\ e^{-x} = \frac{1}{e^x}$.

i) $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall r \in \mathbb{Q},\ e^{rx} = (e^x)^r$.

j) $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$.

k) $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$.

l) $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x \geqslant x + 1$ *(inégalité de convexité de l'exponentielle).*

2.4 Fonctions puissances

Notation. Soient $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $y \in \mathbb{R}$. On note $x^y = e^{y \ln x}$.

Remarques 3.

a) La notation coïncide avec la notation pour les puissances rationnelles.

b) On a ainsi $\ln(x^y) = y \ln x$ pour tous $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $y \in \mathbb{R}$.

c) Pour $a \in \mathbb{R}_+^*$ différent de 1 et $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $a^{\log_a x} = x$.

d) Pour $a \in \mathbb{R}_+^*$ différent de 1 et $x \in \mathbb{R}$, on a $\log_a(a^x) = x$.

Propriétés 3. *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On définit g_α sur $]0, +\infty[$ par $g_\alpha(x) = x^\alpha$.*

a) $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \forall \alpha \in \mathbb{R},\ x^\alpha > 0$.

b) g_α *est dérivable sur* $\mathbb{R}_+^*$ *et* $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ g_\alpha'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$.

c) g_α *est strictement croissante pour* $\alpha > 0$ *et strictement décroissante pour* $\alpha < 0$.

d) $\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*, \forall \alpha \in \mathbb{R},\ (xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha$.

e) $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$.

f) $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ x^{\alpha\beta} = (x^\alpha)^\beta$.

g) *Si* $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x \to 0} x^\alpha = 0$ *et* $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha = +\infty$.

h) *Si* $\alpha < 0$, $\lim\limits_{x \to 0} x^\alpha = +\infty$ *et* $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha = 0$.

Remarque 4. On peut définir les puissances entières ou rationnelles à dénominateur impair sur $\mathbb{R}_-^*$ mais il faut alors faire attention aux propriétés utilisées. Par exemple, on a $((-1)^2)^{\frac{1}{2}} = 1$ alors que $(-1)^1 = -1$.

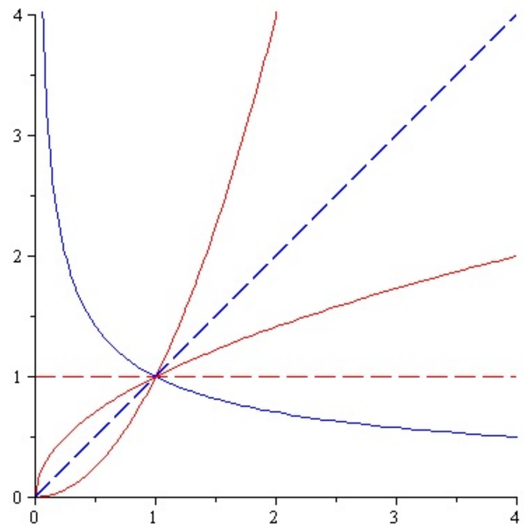

FIGURE 3 – Les fonctions puissances pour $\alpha = -1, 0, \frac{1}{2}, 1, 2$

3 Fonctions trigonométriques

3.1 Fonctions trigonométriques directes

On suppose connues les fonctions cosinus, sinus et tangente (définie par $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$). On rappelle leurs propriétés usuelles à connaître absolument.

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	†

Propriétés 4.

a) $\cos$ *et* $\sin$ *sont dérivables sur* $\mathbb{R}$ *et* $\cos' = -\sin$, $\sin' = \cos$.

b) $\tan$ *est définie et dérivable sur* $D_{tan} = \bigcup\limits_{k \in \mathbb{Z}}]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[$ *et* $\tan' = \frac{1}{\cos^2} = 1 + \tan^2$.

c) $\cos$ *et* $\sin$ *sont* 2π*-périodiques tandis que* $\tan$ *est* π*-périodique.*

d) $\cos$ *est paire tandis que* $\sin$ *et* $\tan$ *sont impaires.*

Propriétés 5.

a) $\cos x = \cos y \iff x \equiv y \ [2\pi]$ *ou* $x \equiv -y \ [2\pi]$.

b) $\sin x = \sin y \iff x \equiv y \ [2\pi]$ *ou* $x \equiv \pi - y \ [2\pi]$.

c) $\cos x = \cos y$ *et* $\sin x = \sin y \iff x \equiv y \ [2\pi]$.

d) $\tan x = \tan y \iff x \equiv y \ [\pi]$.

Remarque 5. On n'hésitera pas à utiliser un cercle trigonométrique pour être sûr de ne pas se tromper dans les valeurs remarquables de cos et sin.

Propriétés 6.

a) $\forall x \in \mathbb{R},\ \cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

b) $\forall x, y \in \mathbb{R},\ \cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$.

c) $\forall x, y \in \mathbb{R},\ \cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$.

d) $\forall x, y \in \mathbb{R},\ \sin(x+y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x$.

e) $\forall x, y \in \mathbb{R},\ \sin(x-y) = \sin x \cos y - \sin y \cos x$.

f) $\forall x \in \mathbb{R},\ \sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$ *et* $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$.

g) $\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$.

h) $\forall x \in \mathbb{R},\ \sin(2x) = 2 \sin x \cos x$.

i) Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ *tels que* $x, y, x+y \in D_{tan}$, *on a* $\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$.

j) Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ *tels que* $x, y, x-y \in D_{tan}$, *on a* $\tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$.

k) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ *tel que* $x, 2x \in D_{tan}$, *on a* $\tan(2x) = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$.

Propriétés 7. *Les propriétés suivantes n'ont pas à être apprises mais doivent être retrouvées rapidement si nécessaire. On considère* $x, y \in \mathbb{R}$.

a) $\frac{1+\cos x}{2} = \cos^2(\frac{x}{2})$.

b) $\frac{1-\cos x}{2} = \sin^2(\frac{x}{2})$.

c) $\sin x \sin y = \frac{\cos(x-y) - \cos(x+y)}{2}$.

d) $\sin x \cos y = \frac{\sin(x-y) + \sin(x+y)}{2}$.

e) $\cos x \cos y = \frac{\cos(x-y) + \cos(x+y)}{2}$.

f) $\cos x + \cos y = 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$.

g) $\cos x - \cos y = -2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$.

h) $\sin x + \sin y = 2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$.

i) $\sin x - \sin y = 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$.

Remarques 6.

a) Les deux premières sont juste une relecture de la formule de duplication du cosinus.

b) Les trois suivantes (formules de linéarisation) s'obtiennent en combinant deux formules d'addition.

c) Les dernières (formules de factorisation) s'obtiennent avec les formules d'addition en écrivant $x = \frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2}$ et $y = \frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2}$.

d) Pour factoriser $\cos x + \sin y$, on écrit $\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$ ou $\sin y = \cos(\frac{\pi}{2} - y)$ et on utilise ce qui précède.

3.2 Fonctions trigonométriques réciproques

Proposition 3. sin *est une bijection de* $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ *dans* $[-1, 1]$.

Définition 6. arcsin *est la fonction réciproque de la restriction de* sin *à* $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$*. Elle est définie sur* $[-1, 1]$.

Remarque 7. Autrement dit, pour $x \in [-1, 1]$, $\arcsin x$ est l'unique élément y de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ vérifiant $\sin y = x$. Ou encore, pour $x \in [-1, 1]$, $\arcsin x = y \iff \sin y = x$ et $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Exemple 1. $\arcsin(\sin(\frac{3\pi}{5})) = \frac{2\pi}{5}$.

Propriétés 8.

a) arcsin *est continue sur* $[-1, 1]$.

b) arcsin *est impaire.*

c) arcsin *est dérivable sur* $]-1, 1[$ *et* $\forall x \in]-1, 1[, \ \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

d) arcsin *est strictement croissante.*

Proposition 4. cos *est une bijection de* $[0, \pi]$ *dans* $[-1, 1]$.

Définition 7. arccos *est la fonction réciproque de la restriction de* cos *à* $[0, \pi]$*. Elle est définie sur* $[-1, 1]$.

Remarque 8. Autrement dit, pour $x \in [-1, 1]$, $\arccos x$ est l'unique élément y de $[0, \pi]$ vérifiant $\cos y = x$. Ou encore, pour $x \in [-1, 1]$, $\arccos x = y \iff \cos y = x$ et $y \in [0, \pi]$.

Exemple 2. $\arccos(\cos(-\frac{\pi}{7})) = \frac{\pi}{7}$.

Propriétés 9.

a) arccos *est continue sur* $[-1, 1]$.

b) arccos *est dérivable sur* $]-1, 1[$ *et* $\forall x \in]-1, 1[, \ \arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

c) arccos *est strictement décroissante.*

d) $\forall x \in [-1, 1], \ \arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}$.

Proposition 5. tan *est une bijection de* $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ *dans* $\mathbb{R}$.

Définition 8. arctan *est la fonction réciproque de la restriction de* tan *à* $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$*. Elle est définie sur* $\mathbb{R}$.

Remarque 9. Autrement dit, pour $x \in \mathbb{R}$, $\arctan x$ est l'unique élément y de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ vérifiant $\tan y = x$. Ou encore, pour $x \in \mathbb{R}$, $\arctan x = y \iff \tan y = x$ et $y \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

Exemple 3. $\arctan(\tan(\frac{9\pi}{8})) = \frac{\pi}{8}$.

Propriétés 10.

a) arctan *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et* $\forall x \in \mathbb{R}, \ \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

b) arctan *est impaire.*

c) arctan *est strictement croissante.*

d) $\lim_{x \to +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$ *et* $\lim_{x \to -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$.

e) Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\arctan x + \arctan(\frac{1}{x}) = \frac{\pi}{2}$.

f) Pour $x \in \mathbb{R}_-^*$, $\arctan x + \arctan(\frac{1}{x}) = -\frac{\pi}{2}$.

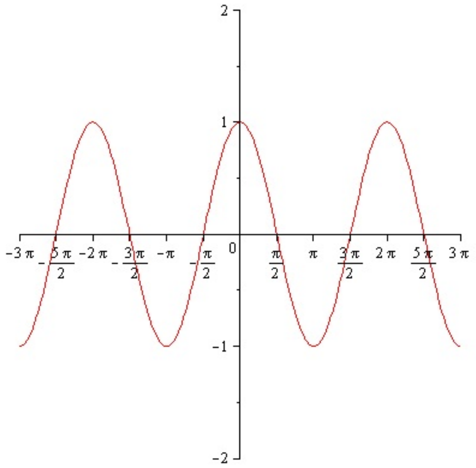

FIGURE 4 – La fonction cos

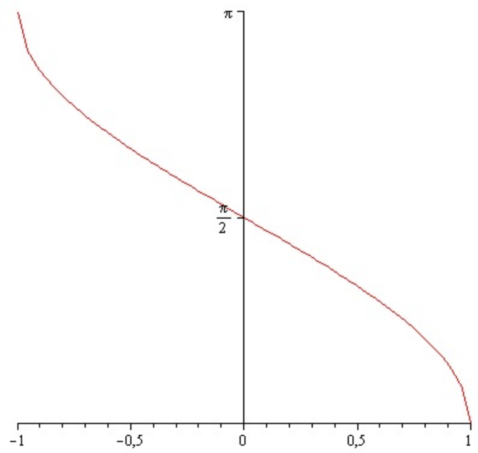

FIGURE 5 – La fonction arccos

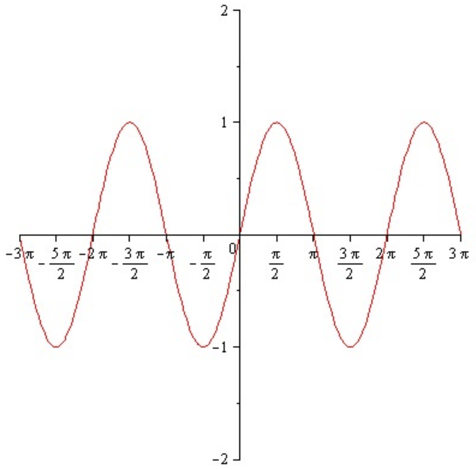

FIGURE 6 – La fonction sin

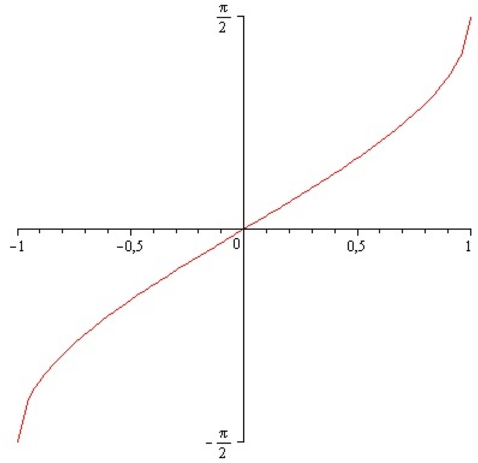

FIGURE 7 – La fonction arcsin

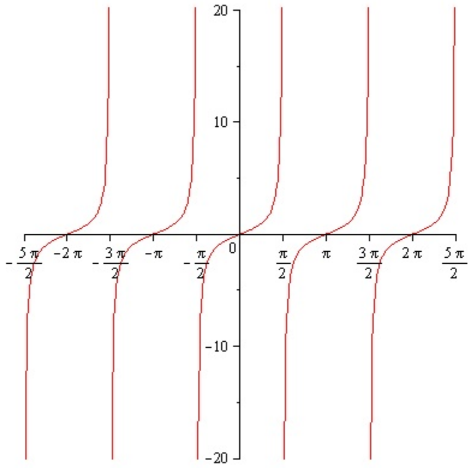

FIGURE 8 – La fonction tan

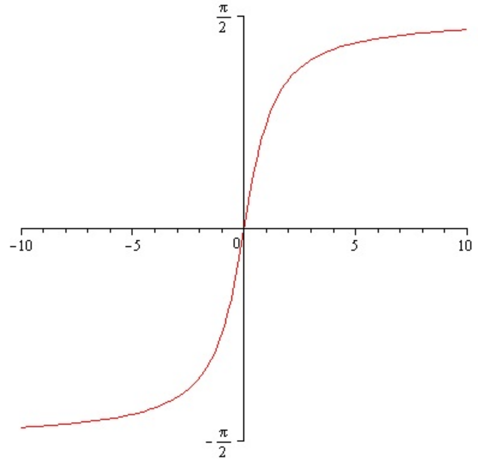

FIGURE 9 – La fonction arctan

4 Fonctions hyperboliques

Définition 9. *On définit sur* $\mathbb{R}$ *les fonctions* ch *(cosinus hyperbolique),* sh *(sinus hyperbolique) et* th *(tangente hyperbolique) par* $\operatorname{ch} x = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$, $\operatorname{sh} x = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$ *et* $\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$.

Remarque 10. On rencontre aussi les notations cosh, sinh et tanh.

Propriétés 11.

a) ch, sh *et* th *sont dérivables sur* $\mathbb{R}$ *et* $\operatorname{ch}' = \operatorname{sh}$, $\operatorname{sh}' = \operatorname{ch}$, $\operatorname{th}' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2} = 1 - \operatorname{th}^2$.

b) ch *est paire tandis que* sh *et* th *sont impaires.*

c) sh *et* th *sont strictement croissantes tandis que* ch *est strictement décroissante sur* $\mathbb{R}_-$ *et strictement croissante sur* $\mathbb{R}_+$.

d) $\operatorname{sh} x$ *et* $\operatorname{th} x$ *sont du signe de* x *tandis que* $\forall x \in \mathbb{R},\ \operatorname{ch} x \geqslant 1$.

e) $\forall x \in \mathbb{R},\ \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$.

f) $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{sh} x = +\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{sh} x = -\infty$.

g) $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{ch} x = +\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{ch} x = +\infty$.

h) $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{th} x = 1$ *et* $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{th} x = -1$.

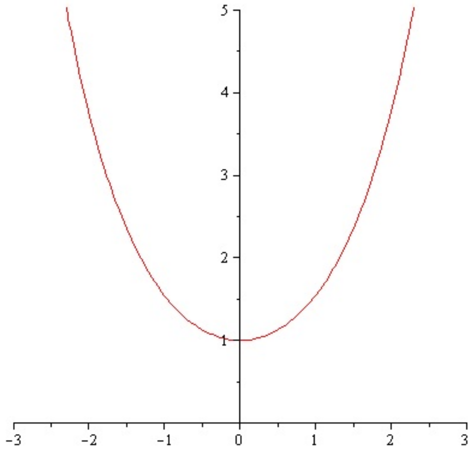

FIGURE 10 – La fonction ch

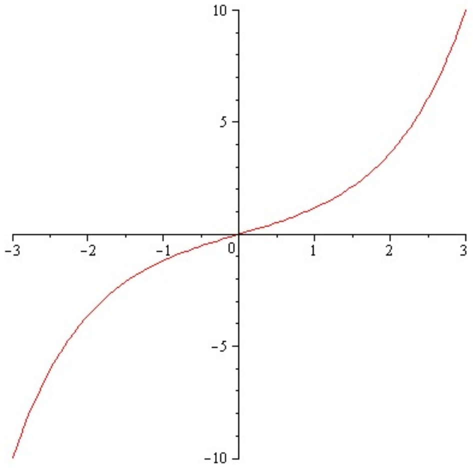

FIGURE 11 – La fonction sh

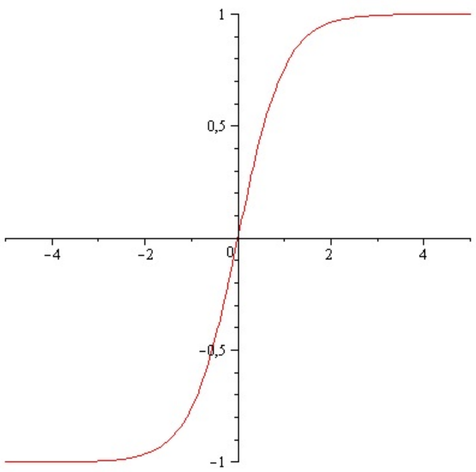

FIGURE 12 – La fonction th

5 Dérivées usuelles

$f(x)$	$f'(x)$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
e^x	e^x
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$
$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$
$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$
$\operatorname{th} x$	$1-\operatorname{th}^2 x = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$
$\cos x$	$-\sin x$
$\sin x$	$\cos x$
$\tan x$	$1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$

6 Exercices d'application

Exercice 1. Calculer $\int_0^1 xe^x\,dx$ et $\int_0^1 \arctan x\,dx$.

Exercice 2. Les questions sont indépendantes.

a) Démontrer l'inégalité de convexité du logarithme et en déduire celle de l'exponentielle.

b) Démontrer que pour $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x, y, x+y \in D_{tan}$, $\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$.

c) Démontrer que pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\arctan x + \arctan(\frac{1}{x}) = \frac{\pi}{2}$ et que pour $x \in \mathbb{R}_-^*$, $\arctan x + \arctan(\frac{1}{x}) = -\frac{\pi}{2}$.

Exercice 3. Montrer que la fonction $x \mapsto \arcsin(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}})$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Calculer sa dérivée et en déduire une expression simplifiée.

Exercice 4.

a) Déterminer le domaine de définition de $x \mapsto \arccos(\cos x)$ et de $x \mapsto \cos(\arccos x)$.

b) Déterminer laquelle de ces fonctions est l'identité sur son domaine de définition.

c) Simplifier $\arccos(\cos x)$ sur $[0, \pi]$ et sur $[-\pi, 0]$. En déduire son tracé sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5.

a) Déterminer le domaine de définition de $x \mapsto \arcsin(\sin x)$ et de $x \mapsto \sin(\arcsin x)$.

b) Déterminer laquelle de ces fonctions est l'identité sur son domaine de définition.

c) Simplifier $\arcsin(\sin x)$ sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ et sur $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$. En déduire son tracé sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6. Simplifier (avec le moins de calcul possible) les expressions suivantes : $\sin(\arccos x)$, $\cos(\arctan x)$, $\tan(\arcsin x)$ et $\arctan(\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}})$.

Exercice 7. On pose $A = \arctan(\frac{1}{2}) + \arctan(\frac{1}{3})$.

a) Calculer $\tan A$.

b) En utilisant un encadrement de A, montrer que $A = \frac{\pi}{4}$.

Exercice 8. Résoudre $\arctan x + \arctan(2x) = \frac{\pi}{4}$.

Exercice 9 (Fonctions hyperboliques réciproques)**.** ch étant une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans $[1, +\infty[$, sh une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et th une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]-1, 1[$, on note $\mathrm{argch}, \mathrm{argsh}, \mathrm{argth}$ leur fonction réciproque.

a) Pour $y \in [1, +\infty[$, résoudre $\mathrm{ch}\, x = y$ et en déduire que pour tout $x \in [1, +\infty[$, $\mathrm{argch}\, x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$.

b) Pour $y \in \mathbb{R}$, résoudre $\mathrm{sh}\, x = y$ et en déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{argsh}\, x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$.

c) Pour $y \in]-1, 1[$, résoudre $\mathrm{th}\, x = y$ et en déduire que pour tout $x \in]-1, 1[$, $\mathrm{argth}\, x = \frac{1}{2}\ln(\frac{1+x}{1-x})$.